DIE
KONSTRUKTIVE KREISPERSPEKTIVE

VON

A. BENTELI

BEILAGE

ZUM

JAHRESBERICHT DES STÄDTISCHEN GYMNASIUMS IN BERN

1909.



BERN
BUCHDRUCKEREI STÄMPFLI & CIE.
1909.

DIE
KONSTRUKTIVE KREISPERSPEKTIVE

VON

A. BENTELI

BEILAGE

ZUM

JAHRESBERICHT DES STÄDTISCHEN GYMNASIUMS IN BERN

1909.



BERN
BUCHDRUCKEREI STÄMPFLI & CIE.
1909.

Die konstruktive Kreisperspektive.

Die konstruktive Kreisperspektive befasst sich mit der Aufgabe, die Zentralprojektion eines Kreises auf eine Bildebene zu konstruieren. Als Projektionszentrum hat man sich dabei den optischen Mittelpunkt des betrachtenden Auges zu denken.

* * *

Die Kreiszentralprojektion Kreisperspektive nennen ist eigentlich nicht ganz korrekt; es mag aber wohl erlaubt sein, da die Zentralprojektion uns das wichtigste theoretische Hülfsmittel für die Perspektive bietet. Perspektive bezeichnet einen umfassenderen Begriff; sie soll uns vom betrachteten Objekte ein Bild bieten, das dem subjektiven Anschauungsbilde, dem Eindruck bei der Betrachtung des Objekts, so gut wie möglich entspricht. Da gilt es denn, bei verhältnismässig geringen Augdistanzen für die Randteile des Bildes von der strengen Zentralprojektion auf die einzige Bildebene etwas abzuweichen, um Verzerrungen im Bilde zu vermeiden. Der Kreis erscheint aber, wenn er nicht parallel zur Bildebene oder nicht in einer Ebene durch den Augpunkt liegt, stets als Ellipse.

* * *

Der darzustellende Kreis liege in einer horizontalen Ebene, in der sogenannten Grundebene.

Der Vollständigkeit wegen werden zunächst einige mehr oder weniger bekannte Konstruktionen nur kurz besprochen.

Bei der konstruktiven Perspektive von Figuren in der Grundebene bezieht man in der Regel diese auf ein System zweier zu einander senkrechter Axen, deren Fluchtpunkte zunächst zu bestimmen sind. Man wird die Lage der Axen beinahe immer so wählen dürfen, dass der Fluchtpunkt der einen Axenrichtung noch auf die Zeichenfläche fällt. Der

Fluchtpunkt der anderen Axenrichtung fällt bei nur einigermassen erheblicher Augdistanz meist nicht mehr auf die Zeichenfläche; man kann sich aber zum Ziehen der Geraden nach jenem unzugänglichen Fluchtpunkte des mechanischen Hülfsmittels der Fluchtpunktschiene bedienen. Denkt man sich nun dem darzustellenden Kreise in der Grundebene ein Quadrat umschrieben, dessen Seitenrichtungen gleich den Axenrichtungen, so lässt sich die Zentralprojektion des Quadrats mit Hülfe der Axenfluchtpunkte und des Diagonalfluchtpunktes leicht finden. Damit bekommt man für die Perspektive des Kreises — Ellipse — vier Tangenten, und die Zentralprojektion der rechtwinkligen Durchmesser der Berührungspunkte liefert uns die Berührungspunkte zu den vier Tangenten.

Das umschriebene Quadrat kann so gewählt werden, dass die eine Richtung senkrecht zur Bildebene, die andere also parallel zu ihr steht; dann bekommt man es mit Hauptpunkt und Distanzpunkt zu tun, siehe Fig. 1 und Fig. 1^a. Fügt man ein zweites umschriebenes Quadrat, das gegen das erste um 45^0 gedreht erscheint, hinzu, so erhält man mit Leichtigkeit vier weitere Tangenten mit ihren Berührungspunkten 5, 6, 7, 8. Fig. 1^a mag die Konstruktion beim Hinblick auf Fig. 1 deutlich genug erklären. $M'E'$ und $M'F' = MA$.

Die acht Tangenten und Berührungspunkte mögen bei kleinen Kreisen genügen, aber vollkommener ist doch eine Konstruktion, die zeigt, wie man sich an beliebiger Stelle eine Tangente mit Berührungspunkt verschaffen kann. Man wird dann hauptsächlich für die Teile stärkster Krümmung Tangenten mit Berührungspunkten konstruieren. Zu solchen Konstruktionen führt uns die Anwendung des Brianchonschen Satzes, wie der Schreiber dieser Zeilen in einem Vortrage in der bernischen naturforschenden Gesellschaft im Jahre 1906 ziemlich ausführlich gezeigt hat. Hier soll nur das Wichtigste darüber mitgeteilt und in Fig. 2 und Fig. 2^a klar gemacht werden.

Der Brianchonsche Satz für den Kreis lautet: Die Verbindungsgeraden der Gegenecken eines einem Kreise umschriebenen Sechsseits schneiden sich in einem Punkte. Dabei

können die Seiten in verschiedener Reihenfolge nummeriert werden, und je zwei Seiten können sich bis zum Zusammenfallen nähern, so dass der Schnittpunkt derselben zum Berührungspunkte der Doppeltangente wird. In diesem Sinne lässt sich ein dem Kreise umschriebenes Viereck als umschriebenes Sechsseit mit zwei Doppelseiten ansehen. Betrachtet man nun in Fig. 2 zunächst Vierseit DAJKC (wobei D und C nur Punkte der unendlich langen Seiten ∞ A und K ∞ sind) als Sechsseit mit ∞ A und AJ als Doppelseiten, also ∞ A = Seiten 1 und 2, AJ = Seiten 3 und 4, JK = Seite 5 und K ∞ = Seite 6, so müssen die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte der Gegenecken: 1 2 mit 4 5, 2 3 mit 5 6, 3 4 mit 6 1, also EJ, AK und G ∞ (parallel AD und BC) sich in einem Punkte X schneiden, denn E ist als Schnittpunkt 1 2 und G als Schnittpunkt 3 4 zu betrachten. Wählt man demnach auf Durchmesser GH einen Punkt X, zieht EX bis J und AX bis K, so ist JK eine Kreistangente. Da in dieser Konstruktion weder Parallelismus noch eine gleichmässige Einteilung vorkommt, so lässt sie sich sofort auf die Zentralprojektion (Fig. 2[a]) übertragen. X kann die ganze Gerade GH durchwandeln, wobei J und K ebenfalls die unbegrenzten Quadratseiten durchlaufen; es lassen sich also von A und E aus am ganzen Kreise herum Tangenten bestimmen. — Selbstverständlich lässt sich diese Konstruktion auch anwenden für andere Formen von Kreisprojektionen, d. h. für die Parabel und Hyperbel, man braucht nur zuerst die Zentralprojektion des umschriebenen Quadrats und der rechtwinkligen Durchmesser der Berührungspunkte zu konstruieren. Bei der Hyperbel wird allerdings die Konstruktion der Tangenten und Berührungspunkte etwas beschwerlich, da die Zentralprojektion des Quadrats ein überschlagenes Viereck wird. Bei alledem ist man eigentlich nicht gebunden an ein dem Kreise umschriebenes Quadrat, ein beliebiges umschriebenes Viereck würde uns ebenso gut dienen, aber die Perspektive des Quadrats ist meist leichter zu erhalten.

Den Berührungspunkt N auf der Tangente JK erhalten wir, indem wir den Schnittpunkt L der Geraden AK und GF

von E aus auf die Tangente nach N projizieren. Zur Begründung wenden wir den Brianchonschen Satz **zweimal** an. Das Viereck ∾ AJK ∾ wird (Fig. 2) nummeriert $1^{\times}2^{\times}$, $3^{\times}$, $4^{\times}5^{\times}$, $6^{\times}$. Die Verbindungsgeraden der Gegenecken sind also EN, AK und J ∾ oder JL, wo N den Schnittpunkt von $4^{\times}$ mit $5^{\times}$, also den Kreisberührungspunkt der Doppeltangente $4^{\times}5^{\times}$ bezeichnet. Zieht man also JL ∥ GH und projiziert den Schnittpunkt L von JL mit AK von E auf die Tangente JK, so bekommt man den Berührungspunkt N. Da aber im allgemeinen der Parallelismus nicht auf die Zentralprojektion übergeht, so muss die Parallele JL zu GH aus der Konstruktion noch wegfallen. Wir erreichen dies durch nochmalige Anwendung des Brianchonschen Satzes und nummerieren Viereck ∾ AJK ∾ so: ($1^{\times}$), ($2^{\times}3^{\times}$), ($4^{\times}$), ($5^{\times}6^{\times}$). Die Verbindungsgeraden der Gegenecken sind AK, GF und JL, es geht also auch GF durch den Schnittpunkt L von AK und JL, die Gerade JL ist somit nicht mehr nötig, denn man braucht jetzt nur den Schnittpunkt L von AK mit GF von E aus auf die Tangente JK zu projizieren. In Fig. 2^{a} sind auch aus den Punkten E′, D′ und F′, C′ Tangenten mit Berührungspunkten konstruiert.

Die Anwendung des Brianchonschen Satzes kann noch zu einer grossen Reihe anderer Konstruktionen von Tangenten und Berührungspunkten führen, besonders wenn in verschiedener Reihenfolge nummeriert wird.

Wir gehen über andere Konstruktionsarten für Tangenten, die in älteren Werken über Perspektive zu finden sind, hinweg und schreiten zur theoretisch vollkommensten Lösung des Problems, d. h. zur Bestimmung der Axen für die Kreisperspektive — Ellipse, indem wir das Wesen der projektivischen Verwandtschaften, besonders der zentrischen Kollineation und der zentrischen Ähnlichkeit, zu Hülfe nehmen.

Zunächst werde in Fig. 3 und 4 an der Perspektive eines Dreiecks BCD der Grundebene gezeigt, wie die zentrische Kollineation zur Anwendung gelangt. Die Perspektive B′C′D′ des Dreiecks BCD ist der Schnitt des Sehstrahlenbündels A (B,C,D) mit der Bildebene. Die Strahlen BB′, CC′, DD′ gehen

durch einen Punkt, den Augpunkt A und die Schnittpunkte der verwandten Geraden BC und B′C′, CD und C′D′, DB und D′B′ liegen in einer Geraden, in der Grundlinie s. Die beiden Eigenschaften sind bekanntlich die charakteristischen Merkmale der zentrischen Kollineation. Zur unendlich fernen Geraden der Grundebene ist der Horizont q′ die verwandte Gerade und zur unendlich fernen Geraden der Bildebene die Gerade r parallel zur Grundlinie durch A′. Horizont q′ und Gerade r sind die Gegenaxen. — Projiziert man ein zentrisch kollineares System parallel auf irgend eine Ebene, so gehen obige zwei Eigenschaften selbstverständlich auch auf die Projektion über und man erhält ein sog. ebenes System zentrisch kollinearer Figuren. Auch wenn wir die Bildebene mit B′C′D′ um die Grundlinie (Kollineationsaxe) in die Grundebene umklappen, so bestehen für BCD und $\underline{B}'\underline{C}'\underline{D}'$ obige zwei Eigenschaften. Die Strahlen B$\underline{B}'$, C$\underline{C}'$, D$\underline{D}'$ gehen dann durch $\underline{A}$, d. h. durch den um die Gegenaxe r in die Grundebene geklappten Augpunkt A, denn man kann nun (Fig. 3) BCD und B′C′D′ und $\underline{A}$ als Parallelprojektion des in Richtung der Sehnen B′$\underline{B}'$, C′$\underline{C}'$, D$\underline{D}'$ und A$\underline{A}$ auf die Grundebene projizierten räumlichen Kollineationssystems betrachten. Die Perspektive B′C′D′ lässt sich somit als zentrisch kollineare Figur zu BCD konstruieren, wie Fig. 4 zeigt. Die Perspektiven von B, C, D liegen auf den Strahlen nach dem umgeklappten Augpunkte $\underline{A}$, der um die Augdistanz unter dem Hauptpunkte O liegen muss. Die zu BD verwandte Gerade B′D′ ist das eine Mal mittelst der Gegenaxe q′ (Horizont), das andere Mal mittelst der Gegenaxe r aufgesucht worden. Punkt S entspricht sich selbst. Das in BD im Unendlichen liegende Q hat den verwandten Punkt in Q′ ($\underline{A}$Q′ ∥ BD) und der verwandte Punkt zu R liegt in Richtung R$\underline{A}$ im Unendlichen, also ist die verwandte Gerade B′D′ parallel zu R$\underline{A}$ durch S zu ziehen. C′ ist einfach aus dem Punktepaar BB′ mittelst der Kollineationsaxe abgeleitet.

Lassen wir noch eine Erweiterung folgen:

Die Perspektive B′C′D′ liesse sich noch in mancherlei Weise als Schnitt von Strahlenbüscheln bestimmen. Wir denken uns (Fig. 4) durch BCD in der Grundebene parallele Strahlen

nach der Grundlinie gezogen, ebenso die Parallele durch A nach dem Horizonte (Gegenaxe), so ist der Schnittpunkt dieser letzteren Parallelen mit dem Horizonte der Fluchtpunkt für das System der Parallelen. Nach diesem Fluchtpunkte sind die Perspektiven der Parallelstrahlen aus deren Durchstosspunkten in der Grundlinie zu ziehen. Der Schnitt dieses Strahlenbüschels mit dem Büschel der Strahlen von B, C, D nach A gibt die Perspektive B′C′D′ des Dreiecks BCD. — Die Parallelstrahlen können dabei natürlich auch senkrecht zur Grundlinie oder um 45° gegen diese geneigt gewählt werden. Im ersteren Falle bekommt man es mit dem Fluchtpunkte im Hauptpunkte O, im zweiten Falle mit dem Fluchtpunkte im Distanzpunkte zu tun.

Noch anders: Denken wir uns die Grundebene mit Dreieck BCD um die Grundlinie (Kollineationsaxe) herum in die Bildebene **hinunter** geklappt und den Augpunkt A (Kollineationszentrum) um den Horizont (Gegenaxe q′) herum nach **oben**, so bekommen wir wieder ein sog. ebenes zentrisch kollineares System. Zeichnet man also das zu BCD in bezug auf die Grundlinie symmetrische Dreieck $B^{\times}C^{\times}D^{\times}$ und zieht die Strahlen aus den Ecken nach dem Punkte $A^{\times}$ (um die Augdistanz d **über** O), so gibt der Schnitt dieses Strahlenbüschels mit dem Strahlenbüschel A (BCD) auch die Perspektive B′C′D′[1]).

Wir werden nun auch die Perspektive eines Kreises der Grundebene als zentrisch kollineare Figur ableiten. Vorerst trachten wir danach, für die Ellipse konjugierte Durchmesser zu erhalten, und dann ist dasjenige Paar konjugierter Durchmesser zu bestimmen, welches rechtwinklig wird, also uns das Axensystem gibt. Dies hat der Verfasser schon in der wissenschaftlichen Beilage zum Jahresbericht der Kantonsschule, 1875, auseinandergesetzt, und zwar ausgedehnt auf Hyperbel und Parabel, die ja auch als Zentralprojektion zu betrachten sind[2]).

---

[1]) Diese Konstruktionsart ist dem Schreiber dieser Zeilen seinerzeit von Prof. Dr. Moser mitgeteilt worden, sie bietet allerdings nur vorherrschend theoretisches Interesse.

[2]) Ähnliches ist selbstverständlich in neueren Werken über darstellende Geometrie zu finden.

Durch das Mittel der zentrischen Ähnlichkeit gelang es ihm damals, ein Verfahren zu finden, das ihn nun befähigt, mit Leichtigkeit für die Kreisperspektive das Axensystem zu konstruieren. Zugleich sollen noch einige Erweiterungen beigefügt werden.

Bestimmung des Axensystems für die Kreisperspektive.

In Fig. 5 sei r eine Gegenaxe. Aus Punkt P dieser Gegenaxe sind die Tangenten an den Kreis gezogen. Die Verbindungsgerade der Berührungspunkte A und B ist die Polare p. Vom Schnittpunkte Q der Polaren p mit der Gegenaxe r sind ebenfalls die Kreistangenten gezogen. Die Verbindungsgerade der Berührungspunkte ist die Polare q, die durch P gehen muss, denn, wenn ein Punkt die Polare p durchwandelt, so muss seine Polare durch den Pol von p, also durch P gehen. Der Schnittpunkt R von p und q liegt harmonisch zu P und Q, ist also der Pol zur Gegenaxe r. Die Punktepaare P und Q, P und R, Q und R heissen konjugierte Punkte, d. h. jeder Punkt liegt auf der Polaren des anderen. Die Geradenpaare p und q, p und r, q und r heissen konjugierte Geraden, jede geht durch den Pol der anderen. Die Punkte P, Q und R bilden ein Tripel harmonischer Punkte; jeder dieser Punkte ist der Pol zur Verbindungsgeraden der beiden andern.

Jedes Tripel harmonischer Punkte, das R mit konjugierten Punkten P, Q der Gegenaxe bildet, führt auf ein System konjugierter Durchmesser im zentrisch kollinearen System. Der R entsprechende Punkt R′ wird Pol zur unendlich fernen Geraden r′, also **Zentrum** der Ellipse. Die p und q entsprechenden p′ und q′ werden **konjugierte Durchmesser.** Da die Polaren p und q alle zu P und Q auf den Sekanten durch P und Q in bezug auf die Kreisschnittpunkte harmonischen Punkte enthalten, so müssen die diesen Punkten entsprechenden Punkte im zentrisch kollinearen System in die Mitte der den Kreissehnen entsprechenden Ellipsensehnen fallen und da die P und Q entsprechenden Punkte ins Unendliche rücken, so werden die

den Kreissehnensystemen entsprechenden Ellipsensehnensysteme zu Parallelsehnensystemen.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PCM und RQM folgt (Fig. 5) $\frac{PM}{MC} = \frac{MR}{QM}$, also $PM \cdot QM = MC \cdot MR = \overline{ME}^2 = t^2 =$ Potenz des Punktes M in bezug auf den Kreis über Durchmesser CR. Die Punktreihen P und Q bilden ein involutorisches Punktsystem mit M als Mittelpunkt der Involution. p steht senkrecht zu CP, also liegt D stets auf dem Kreise über dem Durchmesser CR, die Strahlen DC und DR geben also auf der Gegenaxe r die konjugierten Punktepaare P, Q. Der Kreis über dem Durchmesser PQ schneidet CM in einem Punkte N und es gilt $\overline{MN}^2 = PM \cdot QM$, also auch $= t^2$, N wird somit durch Herabschlagen von t nach MN erhalten. Alle Kreise durch N, die ihre Zentra in r haben, geben auf r auch die Involution P, Q. — Der Punkt N kann aber auch durch Herabschlagen der Tangente PB nach PN erhalten werden, denn aus dem rechtwinkligen Dreieck PBC folgt $PB^2 = PC \cdot PD$. Nun aber folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PCM und PQD: $\frac{PC}{PM} = \frac{PQ}{PD}$, somit $PC \cdot PD = PM \cdot PQ$. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke PNQ entnehmen wir $\overline{PN}^2 = PM \cdot PQ$, also **PN = PB.** Der Kreis aus P mit dem Radius = Tangente PB gibt also auch auf der Gegenaxe konjugierte Punkte P, Q, denn er geht durch den Punkt N, somit geben alle den Kreis in der Grundebene normal schneidenden Kreise auf der Gegenaxe r die Involution P, Q. Man braucht demnach nur aus M die Tangente an den gegebenen Kreis zu ziehen und dieselbe auf MC herabzuschlagen, so erhält man den Punkt N. Die Senkrechte CM zur Gegenaxe r ist die Potenzlinie für alle den gegebenen Kreis normal schneidenden Kreise, deren Zentra in r liegen, denn C hat für alle diese Kreise dieselbe Potenz, nämlich r^2, also müssen auch von daher diese Kreise durch denselben Punkt N gehen.

Ein leichter Schritt führt nun zum Axensystem der Kreisperspektive. Man hat nur diejenigen konjugierten Strahlen p und q zu bestimmen, deren entsprechende Geraden p′ und q′

in der zentrisch kollinearen Figur, Ellipse, rechtwinklig ausfallen. p' und q' sind für die Ellipse konjugierte Durchmesser und sobald diese rechtwinklig werden, so bilden sie das Axensystem der Kreisperspektive. Der über Durchmesser PQ stehende Kreis muss also durch N und durch das Kollineationszentrum O gehen. Die Mittelsenkrechte zu NO gibt auf r das Zentrum F für diesen Kreis $P^{\times}NOQ^{\times}$. $P^{\times}R$ und $Q^{\times}R$ sind die konjugierten Geraden, deren entsprechende Geraden die Richtungen von $P^{\times}O$ und $Q^{\times}O$ erhalten, also zu einander senkrecht stehen, **diese bieten uns das Axensystem für die Ellipse.** In Fig. 5 sind die auf $P^{\times}R$ und $Q^{\times}R$ liegenden Kreissehnen und ihre entsprechenden Sehnen — Axensystem — ganz ausgezogen, also leicht zu erkennen.

Herr Dr. Gasser in Winterthur, der vor einigen Jahren in anderer Weise eine Lösung des Problems gefunden, das Axensystem für die Kreisperspektive zu bestimmen, erhält das Zentrum F für den Kreis $P^{\times}NOQ^{\times}$, indem er aus O die Tangenten an den gegebenen Kreis der Grundebene zieht und durch die Mitten derselben eine Gerade legt. Diese gibt auf r auch den Punkt F, denn der Kreis aus dem so erhaltenen F durch O muss die Gerade OC im Punkte H treffen, der auch der Schnitt ist der Polare GJ zu O mit OC. Nun folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck CGO : $CH \cdot CO = \overline{CG}^2 = r^2$. C hat gegenüber dem Kreise aus diesem F durch O die Potenz $CH \cdot CO = r^2$, also gehört dieser Kreis auch zu der den gegebenen Kreis normal schneidenden Kreisschaar, er geht somit durch N.

Nun zur Hauptsache:

Wir müssen uns von r unabhängig machen, denn in der perspektivischen Zeichnung liegt gewöhnlich schon die Grundlinie (Kollineationsaxe) ziemlich nahe dem unteren Rande des Zeichenblattes, die Gegenaxe r aber fällt weit über das Blatt hinaus. Hier hilft wie in allen Fällen ähnlicher geometrischer Probleme das Wesen der zentrischen Ähnlichkeit.

Die Strahlen $RP^{\times}$ und $RQ^{\times}$ (Fig. 5) schneiden die Kollineationsaxe in $P'^{\times}$ und $Q'^{\times}$. Der Kreis über Durchmesser $P'^{\times}Q'^{\times}$ liegt zentrisch ähnlich zum Kreise über Durchmesser $P^{\times}Q$,

Ähnlichkeitszentrum in R. Der Kreis über Durchmesser $P^{\times\prime}Q^{\times\prime}$ geht durch den Ellipsenmittelpunkt R′, denn RO : RR′ = RP : RP′ˣ, er geht aber auch durch den N entsprechenden Punkt N′, den wir durch Umklappung der zu MT parallelen Strecke M′T′ nach M′N′ erhalten, denn △ MTN liegt zentrisch ähnlich zu △ M′T′N′, Zentrum in R. Man benutzt nun die Gegenaxe r nicht mehr, konstruiert — wie eben gezeigt — den Punkt N′, zieht den Kreis mit Zentrum in der Kollineationsaxe durch N′ und R′ und erhält dadurch $P^{\times\prime}$ und $Q^{\times\prime}$. Auf den Sekanten $P^{\times\prime}R$ und $Q^{\times\prime}R$ liegen die Kreissehnen, deren entsprechende Sehnen in der Ellipse (Kreisperspektive) das Axensystem geben.

Es handelt sich zunächst nun darum, in der perspektivischen Zeichnung, Fig. 6, den Pol R der nicht auf der Zeichenfläche liegenden Gegenaxe r zu konstruieren. Von dem zu M′ verwandten Punkte M der Gegenaxe r, der nicht mehr auf der Zeichenfläche liegt, wären die Tangenten an den gegebenen Kreis zu ziehen, die Verbindungsgerade der Berührungspunkte gibt auf der Geraden MC den Pol R oder — aus der Mitte zwischen M und C wäre ein Kreisbogen durch C zu ziehen, welcher den gegebenen Kreis in Punkte schneiden würde, deren Verbindungsgerade auf MC auch den Pol R geben müsste. Da M nicht mehr auf die Zeichnungsfläche zu liegen kommt, so trägt man nun einfach in beliebiger Richtung CX die Strecke $\frac{CM}{2} = \frac{CM' + d}{2}$ ab, wobei d = Augdistanz = Entfernung der Kollineationsaxe von der Gegenaxe r. Aus X zieht man den Kreis durch C bis zum Schnitt Y mit dem gegebenen Kreis und aus Y die Senkrechte YZ zu XC, so wird CZ = CR, ist somit einfach auf CM′ herunterzuklappen. — So macht es Dr. Gasser, man kann aber auch hier die zentrische Ähnlichkeit benutzen, d. h. wir zeichnen um C den Kreis mit halbem Radius, ziehen aus X eine Tangente daran und fällen aus C die Senkrechte zur Tangente, diese gibt auch den Punkt Y. Letztere Konstruktionsart hilft auch durch, wenn $CX = \frac{CM'}{2} + \frac{d}{2}$ zu gross für die Zeichenfläche wird. Man zeichnet den Kreis um C mit $^1/_3$ oder $^1/_4$ … Radius, trägt in beliebiger Richtung CX — oder

auch in Richtung CM′ — die Strecke $\frac{CM'+d}{3}$ oder $\frac{CM'+d}{4}$ . . . ab und konstruiert ebenso weiter wie oben.

Die Polare zu M schneidet den gegebenen Kreis in T, die Senkrechte zum Radius CT ist die Tangente aus M an den Kreis. Wir ziehen im zentrisch ähnlichen System M′T′ parallel zu MT und klappen M′T′ auf M′C. So erhalten wir den Punkt N′. Der Kreis durch N′ und R′ (das mittels Hauptpunkt und Distanzpunkt leicht zu erhalten ist) mit Zentrum in der Kollineationsaxe gibt auf letzterer die Punkte $P^{\times\prime}$ und $Q^{\times\prime}$ und die Sekanten aus diesen Punkten durch R geben die Sehnen AB und DE, deren entsprechende Strecken A′B′ und D′E′ rechtwinklig ausfallen. Sie sind konjugierte Durchmesser als entsprechende Geraden zu konjugierten Geraden, also bieten sie uns das **Axensystem für die Ellipse, d. h. für die Kreisperspektive.**

In Fig. 6 sind die Endpunkte der Axen A′B′, D′E′ durch die Senkrechten von AB, DE zur Kollineationsaxe, also mittels des Hauptpunktes H konstruiert worden. Verifikationen ergeben sich bei Berücksichtigung des Distanzpunktes und auch bei Verwendung der Kollineationsstrahlen AA′, BB′, DD′ und EE′, die nach dem Kollineationszentrum O zu ziehen sind, das um die Augdistanz von H absteht.

Gewöhnlich wird allerdings die Augdistanz d so gross sein, dass O nicht mehr auf die Zeichenfläche fällt. Zum Glück kann man diesen Punkt entbehren. Ebenso kann der Distanzpunkt über die Zeichenebene hinaus fallen, aber bekanntlich lässt sich auch mit $\frac{D}{2}$, $\frac{D}{3}$ etc. fertig werden. **Das Axensystem der Kreisperspektive lässt sich also, wie Fig. 6 zeigt, ohne grosse Mühe finden.**



Tafel I.

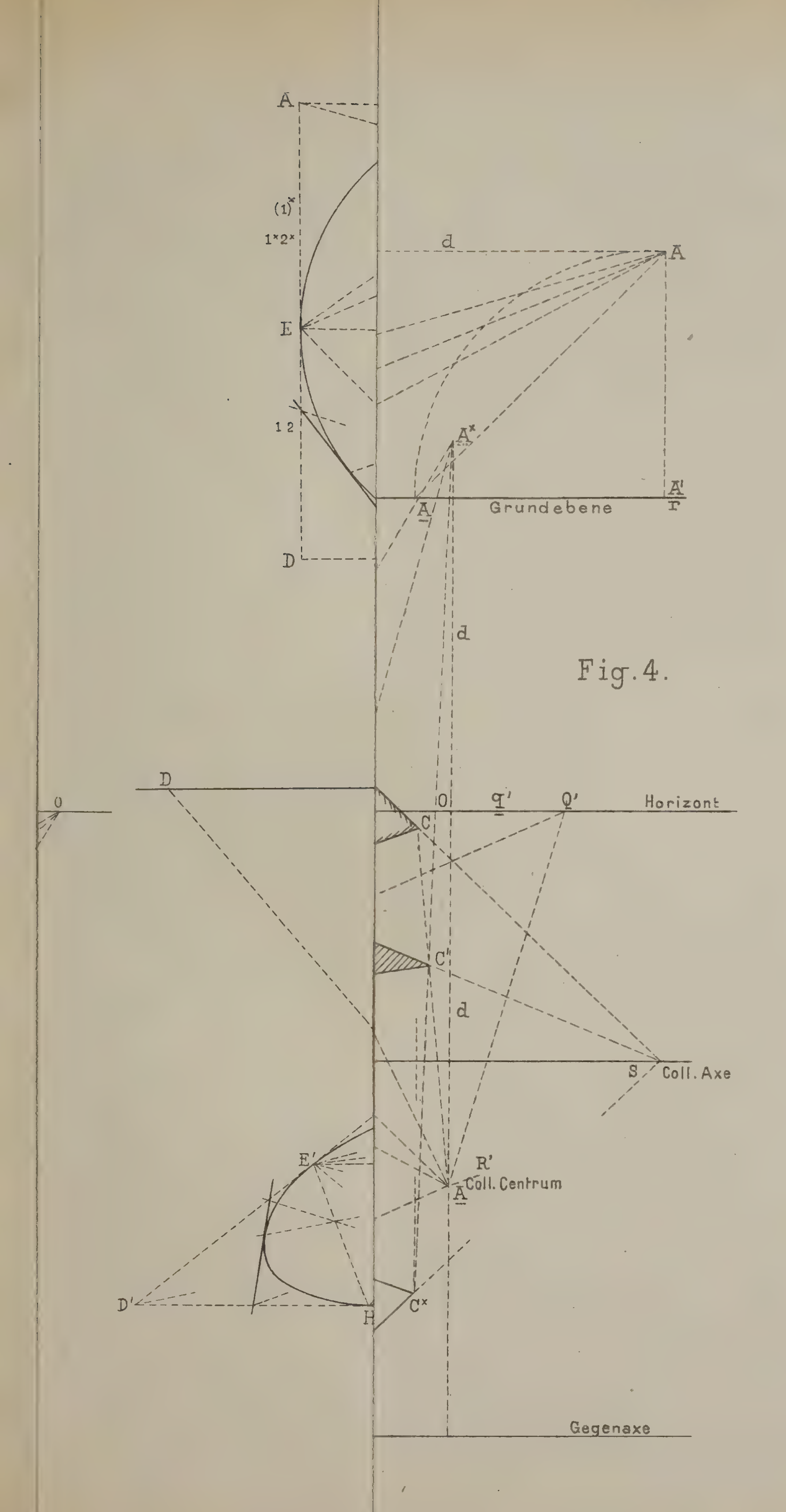

A
(1)ˣ
1ˣ2ˣ
d
A
E
1 2
Aˣ
A'
A
Grundebene
r
D
d
Fig. 4.
D
0
O
q'
Q'
Horizont
C
C'
d
S
Coll. Axe
E'
R'
Coll. Centrum
A
D'
H
Cˣ
Gegenaxe

Fig. I.

Fig. 2.

1.2. Gegenecke zu 4.5.
2.3. " " 5.6.
3.4. " " 6.1.

Fig. 3.

Bildebene

Grundebene

Fig. 4.

Horizont

Coll. Axe

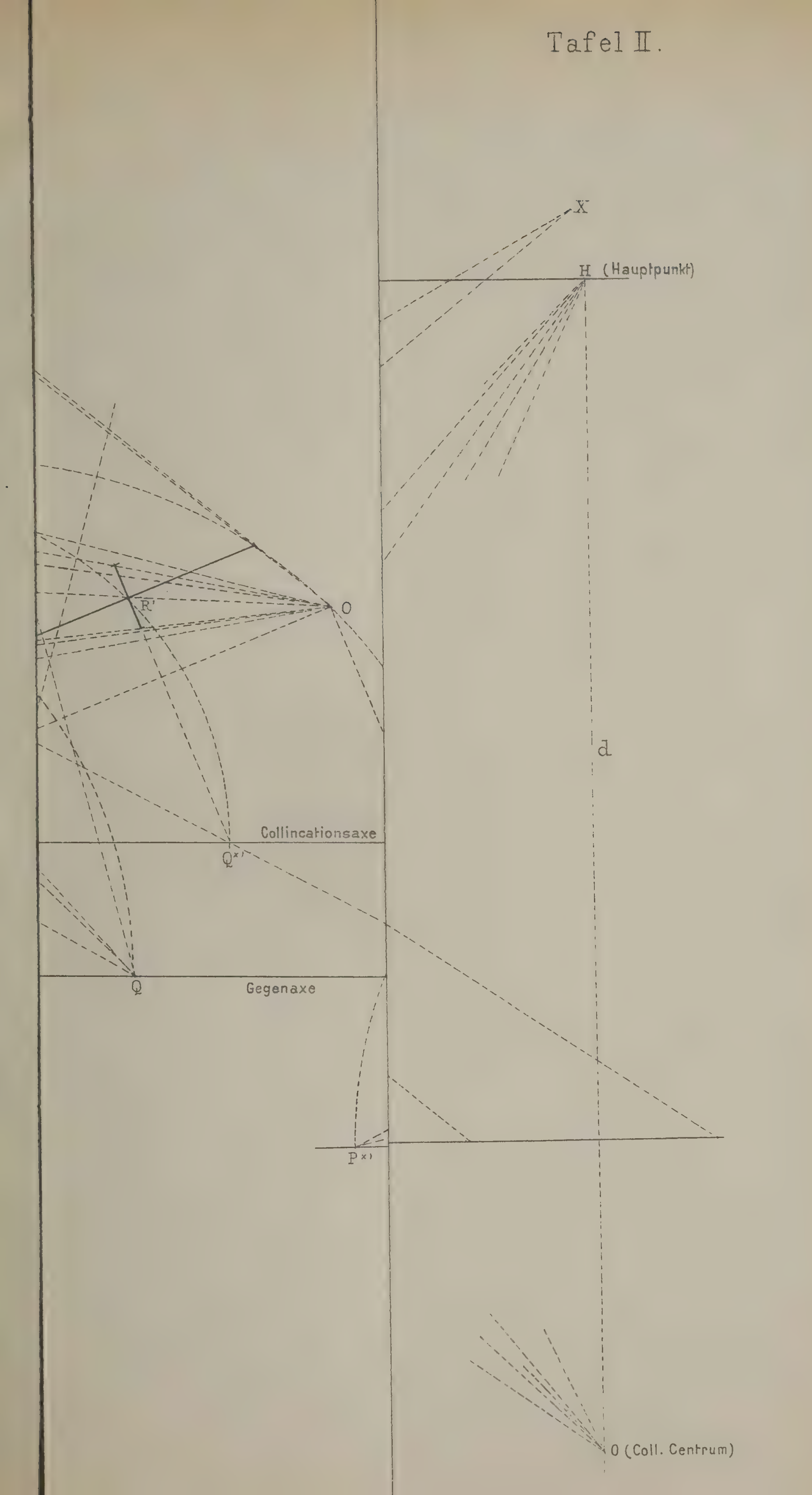
Coll. Centrum

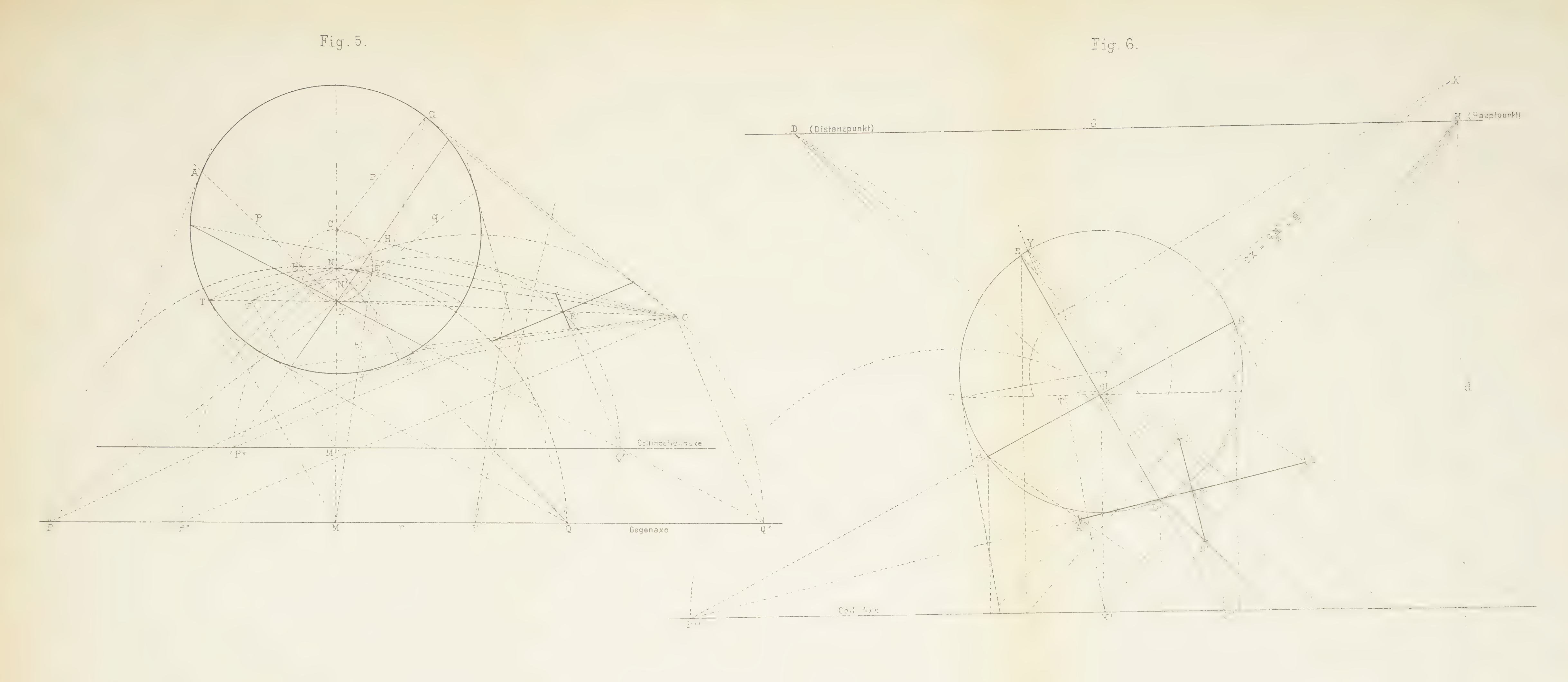
Gegenaxe

Fig. 1ª.

Fig. 2ª.

Tafel II.


X
H (Hauptpunkt)
R'
O
d
Collineationsaxe
Q×'
Q
Gegenaxe
P×'
O (Coll. Centrum)



O (Coll. Centrum)